

福山大学工学部紀要

第 23 卷 1999 年 10 月

永久磁石磁気回路の解析

安藤 詔生*

Numerical Analysis of Magnetic Circuit Containing Permanent Magnet

Tuguo ANDO

ABSTRACT

Permanent magnets are now finding increasing application in industrial and consumer devices. Therefore, it is very important to analyze the magnetic field which may decide the specific characteristic of device. In this paper, well known three methods of numerical analysis, in which the equivalent magnetic circuit, scalar potential or vector potential is used, are first introduced. Next, the magnetic flux distribution in the representative magnetic circuit containing permanent magnet is analyzed by using respective methods. From comparison of results, relative merits are presented

キーワード: 永久磁石, 磁気回路, 磁界分布, 有限要素法

Keywords: Permanent magnet, Magnetic circuit, Field distribution, FEM

1. まえがき

永久磁石は, 今日, 特性の向上により, 需要が急速に増進している. とくに, 小形の制御用ブラシレスモータへの使用が増大している. 従って, モータなど磁石適用機器の特性を左右する磁界の詳細な解析が必要とされている.

本論文では, まず, 磁界解析の代表的な数値解法として知られている (1) 等価磁気回路を用いる解法, (2) スカラポテンシャルと有限要素法を用いる解法, (3) ベクトルポテンシャルと有限要素法を用いる解法の 3 解法について, 理論的な説明を加える. 次に, 簡単化された小形モータの永久磁石界磁回路における磁界分布を, それぞれの解法を用いて解析する. 解析結果に関しては, 数値解析のための磁路分割の影響, 解法の基となる理論や原理の影響などについて検討を加える.

2. 基礎方程式と数値解析法

2. 1 基礎方程式

静止した永久磁石磁気回路においては, 励磁電流や誘導による電流がないので, Maxwell の電磁界方程式

は, 次式のように簡単化される.

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

磁気回路における磁界解析では, (1), (2) 式の代わり
に積分形式の

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

も多く使われる. なお, 磁界の強さ H と磁束密度 B との関係は, 磁気飽和やヒステリシス現象などにより様々に変化するが, ここでは簡単のため, 磁路鉄心では透磁率 μ を利用した $B = \mu H$ で表されるものとする. 図 1 のような減磁特性曲線を有する永久磁石においては, 直線 $B_p B_o$ より, 次式で表されるものとする.

$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_o, \quad \mu_r = B_o / H_o \quad \dots\dots\dots (5)$$

図 1 と (5) 式において, B_r は残留磁束密度, H_c は保磁力である. B_p , B_o , H_o は, 磁路の構成や材質など永久磁石の使用形態によって定まるものである. μ_r は大気透磁率にほぼ等しい値を持ちリコイル透

*電子・電気工学科

磁率と称されることがある[1]。なお、(5)式の B_o の方向は、磁石のS極からN極に向かう方向とする。

永久磁石磁気回路における磁界は、(5)式や境界条件を利用して、(1)、(2)式あるいは(3)、(4)式を数値的に解くことによって求められる。なお、解析対象としての磁気回路には、近年の永久磁石の使用が急速に増大している電動機の界磁回路を考え、図2のような断面構成の4極永久磁石界磁回路を使用する。

以下に述べる数値解析法では、界磁回路の軸方向長さが十分に長いものとして2次元磁界解析を行う。

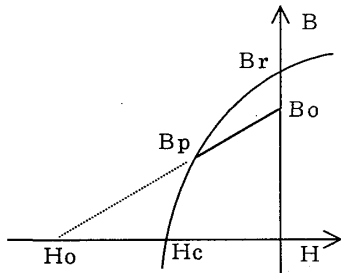


図1 永久磁石のB-H特性

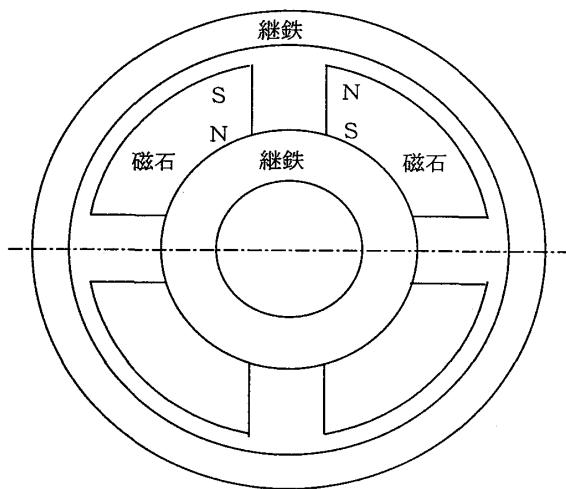


図2 永久磁石界磁回路

2. 2 等価磁気回路法

この解法は、古くから設計などに使用されてきた一解析手法である[1]。(3)式の周回積分路 c を、微小な磁路長 li ($i=1, 2, \dots, n$)によって分割すると

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \int_{li} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

が得られる。ここで、図3のような長さ l 、断面積 S の微小磁路を考え、長さ方向の磁界成分を H と B 、断面を通る磁束を ϕ とする。(5)式などにより

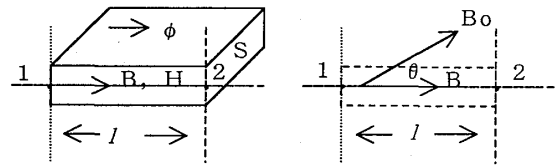


図3 微小磁気回路

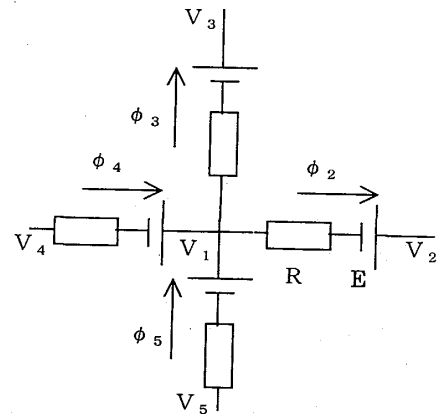
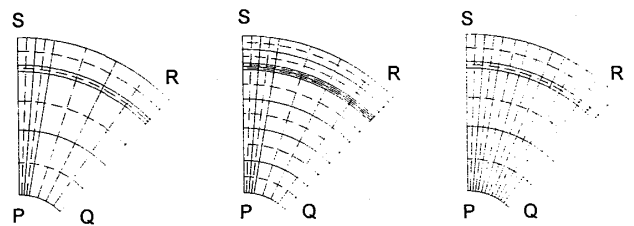


図4 等価回路



(a) 4x4 分割 (b) 8x4 分割 (c) 16x14 分割
図5 磁気回路分割

$$Hl = \frac{Bl}{\mu} = R\phi, \quad R = \frac{l}{\mu S} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$Hl = \frac{B - B_o \cos \theta}{\mu_r} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$= R\phi - H_o l \cos \theta, \quad R = \frac{l}{\mu_r S}$$

が導かれる。 $B_o \cos \alpha$ や $H_o \cos \alpha$ は、永久磁石の内部磁界の磁路方向成分である。ここで、他の微小磁路との接続点1、2における磁位を V_1 、 V_2 で表すと、(7)、(8)式より次の関係式が導かれる。

$$\phi = (V_1 - V_2) / R \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$\phi = (V_1 - V_2 + E) / R, \quad E = H_o l \cos \theta \quad \dots \dots \dots (10)$$

2次元解析では、 x 方向と y 方向(或いは径方向と円周方向)からの接続点1への磁束の出入りを考える

ことにより、図4のような電氣的等価回路が得られる。
(4)式より磁束についての次式が導かれる。

$$\phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 0 \dots\dots\dots (11)$$

(9), (10)や(11)式による磁界解析は、図2に示した磁路の対称性により、磁路断面の1/8領域を使用する。径方向並びに円周方向への磁路分割を、磁界分布を考慮に入れて図5のようにする。図5の各接続点に(11)式を適用すると、全ての接続点上の磁位を求めるための連立方程式が導かれる。なお、内側継鉄の内部表面や外側継鉄の外部表面からの磁束の漏れは無視できるものとする。各点上の磁位が求められると、(9), (10)式より磁路内の磁束が計算でき、磁路面積で除することで磁束密度が求められる。

2. 3 スカラーポテンシャルを用いた有限要素法

次式を満たすスカラーポテンシャル $V(x, y)$ を導入し、

$$\mathbf{H} = -\text{grad}V(x, y) \dots\dots\dots (12)$$

解析領域は後の図7のように三角形要素で分割する。

ここで、三角形要素内の $V(x, y)$ が次の1次近似式

$$V = a + bx + cy \dots\dots\dots (13)$$

で与えられるものとする。図6に示した三角形要素の頂点(以下、節点と称す)の磁位を V_i ($i=1, 2, 3$)、節点座標を (x_i, y_i) とすると

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2, \quad \dots, \quad D = a_1 + a_2 + a_3 \quad (14)$$

が得られる[2]。なお、 \mathbf{H} の x と y 方向成分は

$$\begin{aligned} H_x &= -(b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3) / D \\ H_y &= -(c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3) / D \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

で表される。(12)式の条件より、電磁界の基本式(1)或いは(3)が満たされる。各節点周辺に(4)式を適用することによって、(2)式を近似的に満たすための条件式(節点方程式と称す)を求める。

図6において、節点1周辺の線分 $M_3 G$ 、 $M_2 G$ と z 方向1(m)からなる微小面積からの磁束の発散は

$$\int_{M_3 G + M_2 G} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{-1}{2} (B_x b_1 + B_y c_1) \dots (16)$$

として求められる。ここで、三角形要素が、 θ 方向に磁化された永久磁石より構成されていると考えることにする。(5)式より

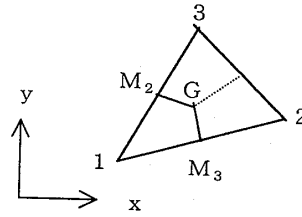
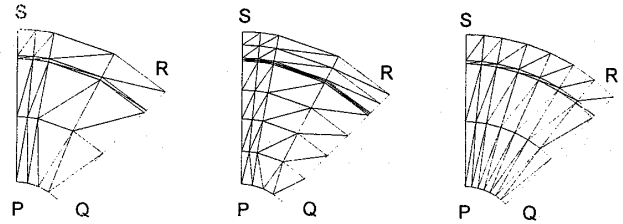


図6 三角形要素



(a) 4x4 分割 (b) 8x4 分割 (c) 16x14 分割

図7 三角形要素分割

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_r H_x + B_0 \cos \theta \\ B_y &= \mu_r H_y + B_0 \sin \theta \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

が導かれる。(15), (17)式を(16)式に代入すると

$$\frac{\mu_r}{2D} \{ (b_1^2 + c_1^2) V_1 + (b_1 b_2 + c_1 c_2) V_2 + (b_1 b_3 + c_1 c_3) V_3 \} \dots\dots (18)$$

の未知節点磁位を含む式と、磁石材料によって決まる次式が求められる。

$$\frac{B_0}{2} (b_1 \cos \theta + c_1 \sin \theta) \dots\dots\dots (19)$$

なお、磁石以外の三角形要素では、(18)式の μ_r が構成材料の透磁率 μ に置き換えられ、(19)式の項は無くなる。図7の境界 PQ 、 QR 、 RS は自然境界条件、 PS は固定境界条件として扱う[2]。

2. 4 ベクトルポテンシャルを用いた有限要素法

次の条件を満たすベクトルポテンシャル \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \dots\dots\dots (20)$$

を導入すると、(2)式が満たされる。本論文で扱う2次元解析では、 \mathbf{A} が z 方向成分だけを持ち $\mathbf{A}(x, y)$ で表されるものとする。スカラーポテンシャルを利用した場合と同様、図6に示された三角形要素内では、(14)式の a, b, c を用いて

$$\mathbf{A} = a + bx + cy \dots\dots\dots (21)$$

と表されるものとする。 \mathbf{B} の x と y 方向成分は

$$B_x = \frac{1}{D}(c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3) \dots\dots\dots (22)$$

$$B_y = \frac{-1}{D} - (b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3)$$

として表される。

次に、各節点の周辺に(3)式を適用することによって、(1)式を近似的に満たすための条件式を導出する。図6において、線分 M_3GM_2 の線積分を行うと

$$\int_{M_3GM_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2}(H_x c_1 - H_y b_1) \dots\dots\dots (23)$$

が得られる。(17)、(22)、(23)より、未知のベクトルポテンシャルを含む

$$\frac{1}{2\mu_r D} \{ (b_1^2 + c_1^2) A_1 + (b_1 b_2 + c_1 c_2) A_2 + (b_1 b_3 + c_1 c_3) A_3 \} \dots\dots\dots (24)$$

と磁石によって決まる次式が導かれる。

$$\frac{H_o}{2} (c_1 \cos \theta - b_1 \sin \theta) \dots\dots\dots (25)$$

三角形要素の構成が磁石以外の場合は、 μ_r を μ に置き換え、 $H_o=0$ とする。ただし、境界条件については、図7のPQ、QR、RSが固定境界となり、PSが自然境界となる。

3. 解析結果

図2に示した4極の永久磁石界磁回路において、次の諸量が与えられたものとして磁界分布の解析を行う。なお、単位系としては、資料[1]と同じガウス単位系を使用する。

外側継鉄外径	13.1cm	内側継鉄外径	7.6cm
外側継鉄内径	11.4cm	内側継鉄内径	3.6cm
永久磁石の長さ	1.8cm	空隙長	0.1cm
永久磁石の角度	70°	磁極間角度	20°
外側継鉄透磁率	3000G/Oe		
内側継鉄透磁率	1000G/Oe		
永久磁石 (フェライト)			
動作磁束密度 (Bo)	3700G		
リコイル透磁率 (μ_r)	1.07G/Oe		

なお、永久磁石は、径方向に一樣な磁化が行われているものとする。

3. 1 等価磁気回路法による解析結果

図8は、内側継鉄、磁石部、空隙部、外側継鉄の径方向分割をそれぞれ1の4、磁石部と極間隙部の円周

方向分割をそれぞれ2の4とする粗い磁路分割を行った場合の解析結果である(図5(a)参照)。図8(a)において、実線Bmは、磁石の中心部を通る円周上での磁束密度の径方向成分の分布を示し、破線Bgは、空隙中心部での磁束密度径方向成分の分布を示すものとする。同図(b)の実線Biyと破線Boyは、それぞれ内側継鉄と外側継鉄の中心部を通る磁束の円周方向成分である。図8(a)の分布では、分割の粗さにより、70°の磁石幅が55°程度に狭められた形になっている。磁極表面から出た磁束は、空隙を通過して外側継鉄に入る。従って、磁極に比して狭い厚さ0.83cmの継鉄部を円周方向に通る磁束の密度は、同図(b)の破線で示したBoyのように図(a)のBmやBgの約4倍の値に達することがある。磁路鉄心には、磁気飽和などが生じない材料を選定する必要がある。なお、厚さ2cmの内側継鉄では、5000G程度の値にとどまっている。

図9は、径方向の分割を2倍にした場合(図5(b))の解析結果で、図8とほぼ同じ結果が得られている。

図10は、径方向の分割を4、周方向の分割を磁石部5、間隙部2の7とした場合(図5(c))の解析結果である。図9の結果に比して、磁束分布の幅が63°程度にまで改善されている。

図11は、径方向を16、周方向を14と細かな分割にした場合の結果を示したものである。同図(a)では、磁束分布が磁極幅にまで広がった結果となっている。同図(b)では、分割の細やかさにより内側継鉄部のBiyの分布が滑らかになっている。しかし、面積が狭く磁路の長い外側継鉄では磁束が内側に集中する傾向が表れ、中心部のBoyが小さな値になっている。このような分布の隔たり誤差を減らすには、分割を細かくするだけでなく、正方形に近い分割を行い径方向と周方向の磁気抵抗のバランスを考慮に入れることが必要とされる。

3. 2 スカラーポテンシャルと有限要素法による解析結果

図12は、径方向を4、周方向を4の分割による三角形要素分割を行い(図7(a))、各接点上のスカラーポテンシャルを2.3節の手法を用いて算出、(15)、(17)を利用して求めた磁束密度分布である。磁石の表面が接点として選ばれているので図8の等価回路法による結果と異なり、磁石部の磁界分布幅の減少は生じない。しかし、破線で示された空隙磁束密度Bgには分割の粗さの影響が表れている。

図13は、図7(b)のように径方向分割を2倍にした場合の結果で、図12に比して、実線のBmの値が僅かに減少し、破線のBoyの分布には分割の細やかさによる解析改善の効果が表れている。

図14は、図7(c)のように、周方向分割を7に増や

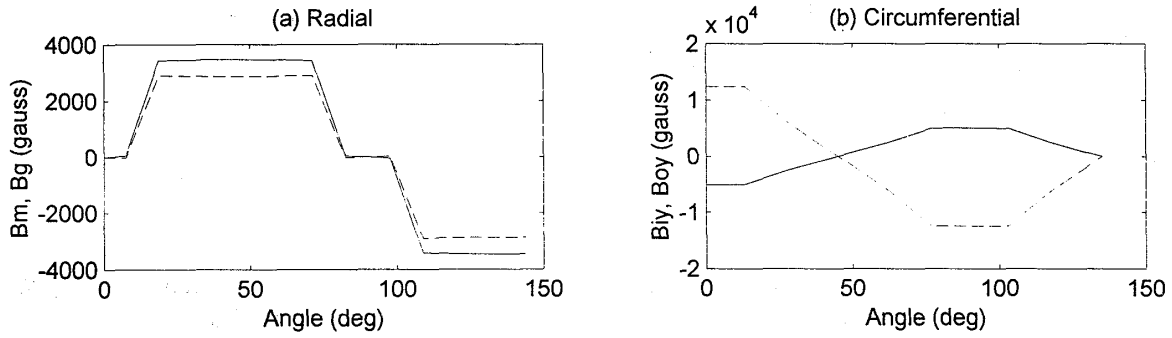


図 8 磁気回路法による磁束密度分布 (4×4 分割)

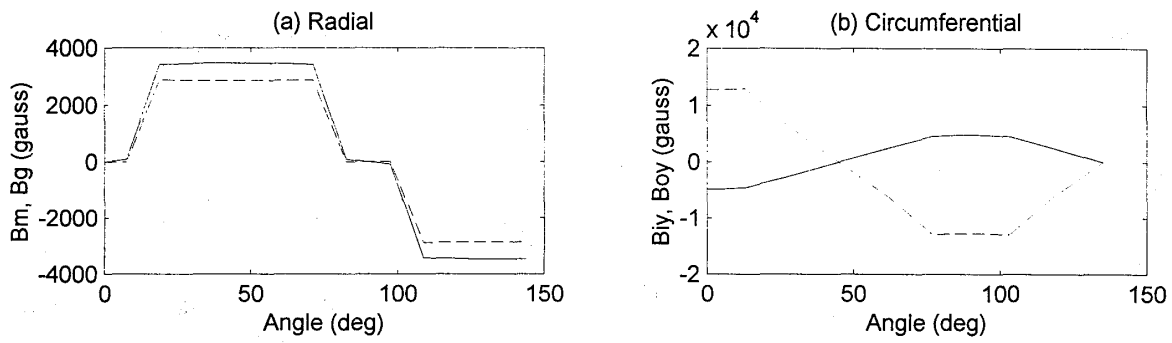


図 9 磁気回路法による磁束密度分布 (8×4 分割)

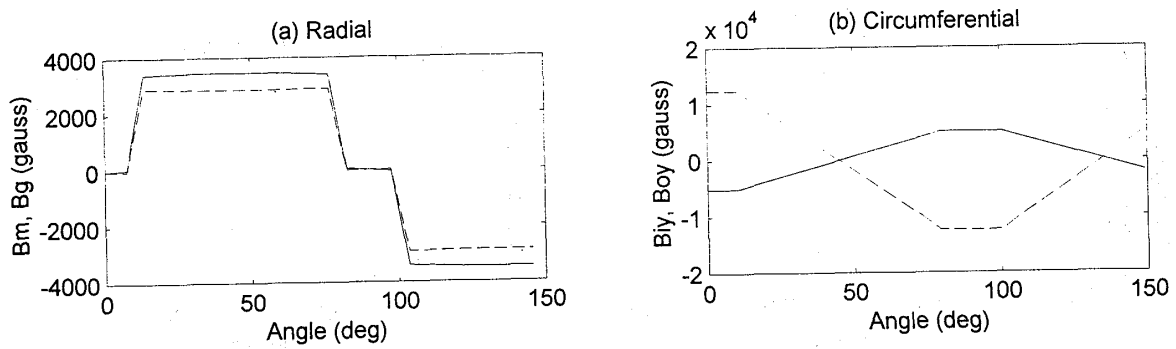


図 10 磁気回路法による磁束密度分布 (4×7 分割)

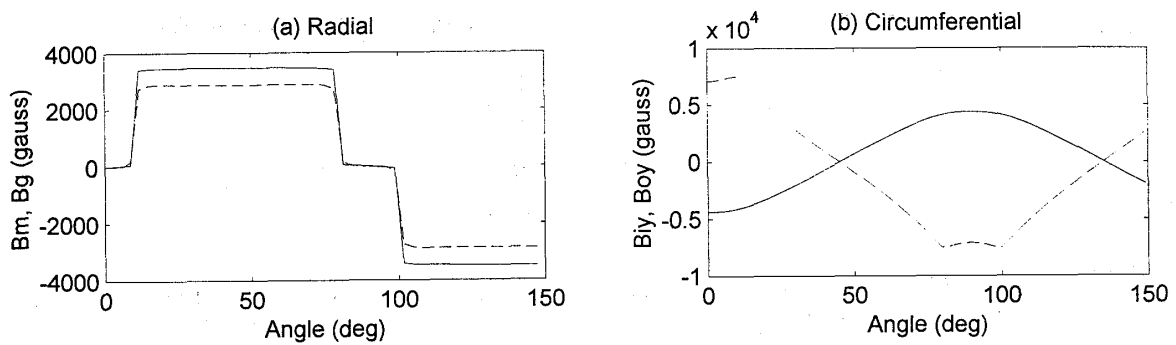


図 11 磁気回路法による磁束密度分布 (16×14 分割)

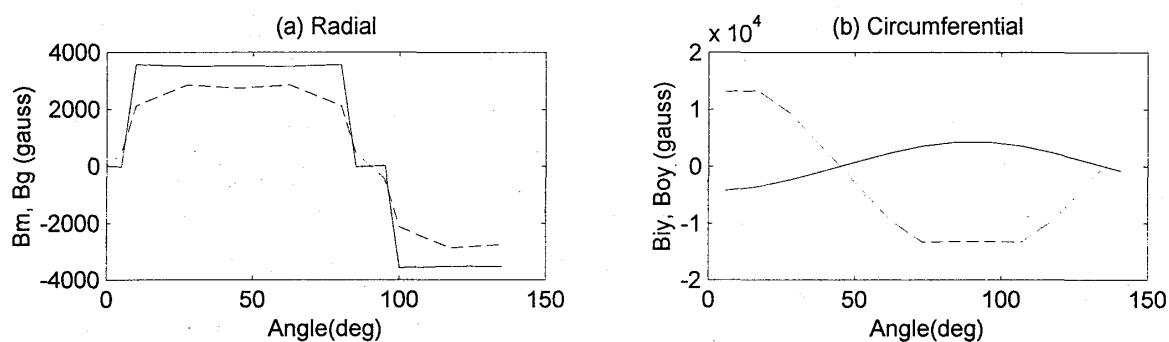


図 12 スカラポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (4 × 4 分割)

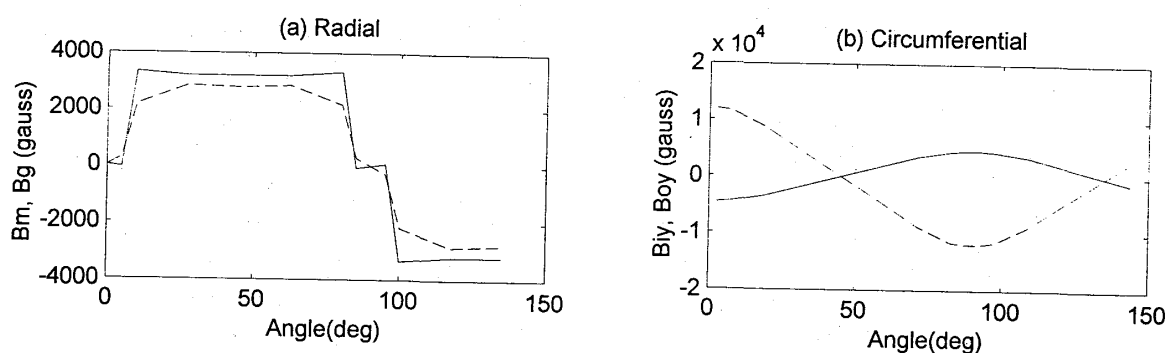


図 13 スカラポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (8 × 4 分割)

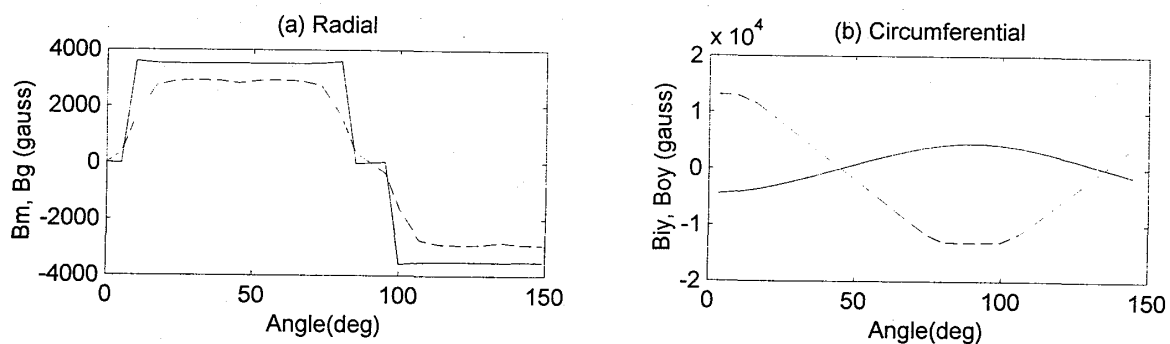


図 14 スカラポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (4 × 7 分割)

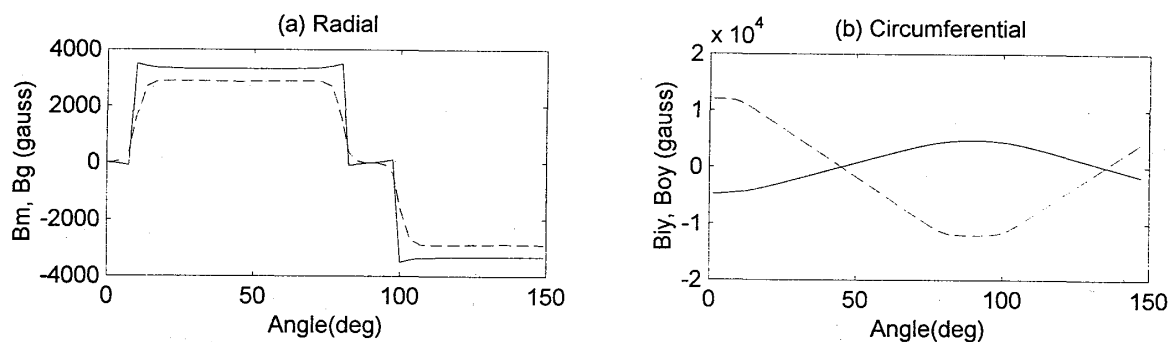


図 15 スカラポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (16 × 14 分割)

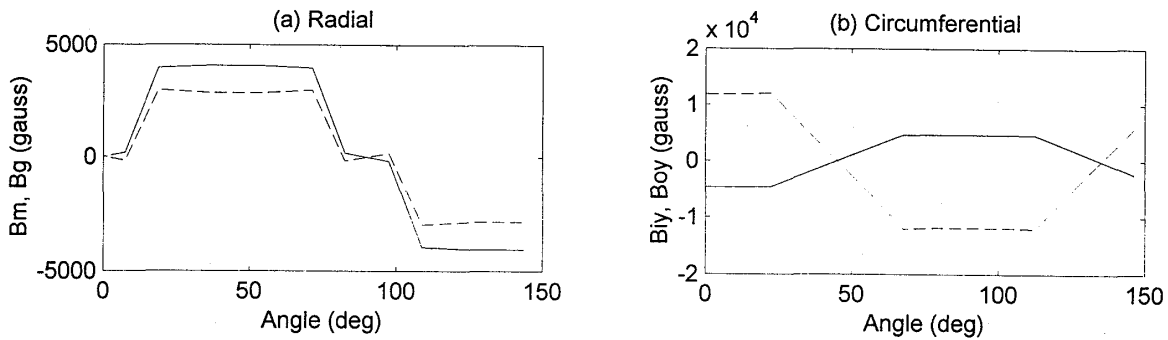


図 16 ベクトルポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (4×4 分割)

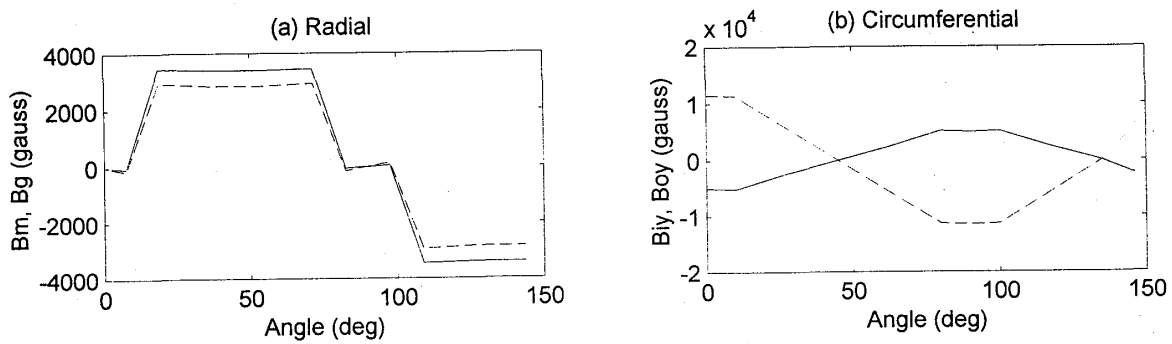


図 17 ベクトルポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (8×4 分割)

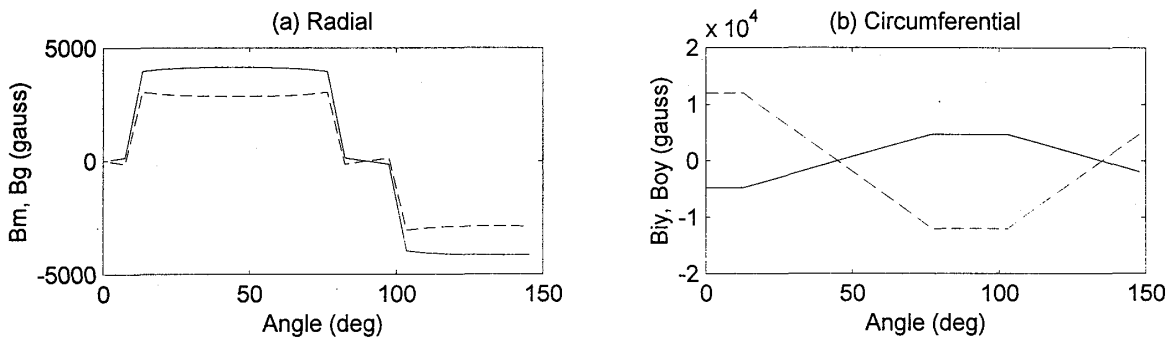


図 18 ベクトルポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (4×7 分割)

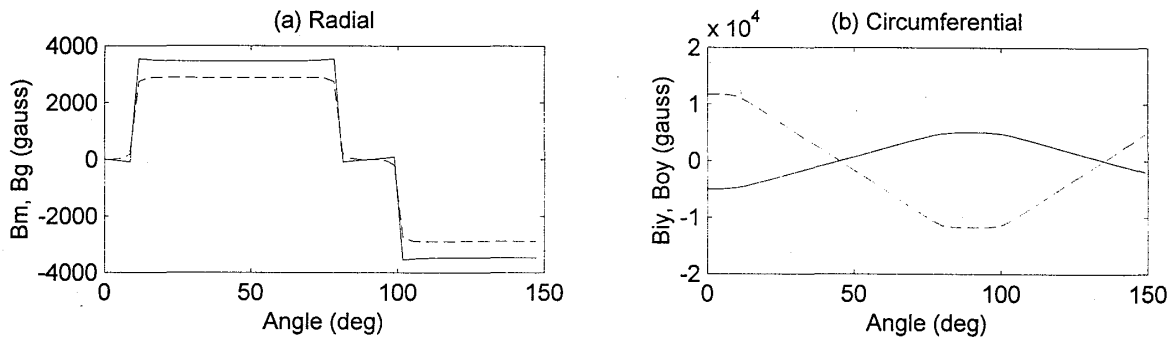


図 19 ベクトルポテンシャルと有限要素法による磁束密度分布 (16×14 分割)

した場合の結果で、磁石両端部からの磁束の周方向への広がり解析され、 B_g の分布幅が B_m の幅に比して狭くなっている。

図 15 は、径方向を 16、周方向を 14 と細かな分割を行った場合の結果である。 B_g については磁石端部における磁束の周方向への広がりによる減少が解析できている。なお、 B_m については、磁石端部での僅かな磁束集中が解析されている。等価回路法の図 11 の結果との比較では、 B_m と B_g の磁石端部での分布、 B_{oy} の分布の解析結果に改善効果が表れている。

3. 3 ベクトルポテンシャルと有限要素法による解析結果

図 16 は、図 7 (a) の粗い分割時の解析結果である。磁石表面部に接点を選んでいるにもかかわらず、(22) 式による密度計算では、等価回路法の場合と同様、磁石幅に対する B_m 、 B_g の分布幅が減少している。なお、 B_m の値は、永久磁石の動作磁束密度の最大値の 3700 G を超え、4100 G 程度にまで達している。また、 B_{iy} と B_{oy} については、磁路外部表面 PQ、RS を固定境界とした影響が顕著に表れている。

図 17 は、径方向の分割を 2 倍にした場合 (図 7 (b)) の解析結果である。 B_m の値は、他の手法で得られた 3500 G 程度の値に改善されている。

図 18 は、図 7 (c) の分割を使用して求めた磁束分布である。径方向の分割が粗いので、図 16 の場合と同様の解析誤差により、 B_m が 4100 G 程度の値に達している。ただし、周方向の分割を細かくしたので、 B_m と B_g の分布幅の減少についてはかなり改善されている。

図 19 は、細かな分割を行った場合の磁束密度分布で、 B_m と B_g については、図 11 や図 15 とほぼ同じ結果が得られている。継鉄内の B_{oy} については、図 15 に類似した結果が得られており、図 11 (b) に表れた等価回路法を利用した場合の欠点が修正されている。

4. あとがき

永久磁石の利用が増大するとともに、永久磁石磁気回路における詳細な磁界解析が必要とされてきた。本

論文では、まず、磁界の数値解析法として広く使用されている 3 解法について、理論的な説明を加えた。次に、それぞれの解法を用いて、小形モータの永久磁石界磁回路における磁界分布の解析を行った。これらの解析結果についての比較や検討により、各解法の特徴が確認できた。

(1) 古くから使用されてきた等価磁気回路による解法は、磁界分布を考慮に入れた磁路分割を行うと、粗い分割でもかなりの解析精度が期待できる。ただし、分割磁路の形態が不適切な場合には、偏った磁界分布になることがある。

(2) スカラポテンシャルと有限要素法を用いる解法は、磁界とその源となる永久磁石の磁化との直接的な関係を表すアンペアの周回積分の法則を満たす関数を使用すること、関数の勾配と磁界の方向が一致することなどから、比較的粗い要素分割でも、かなりの解析精度が期待できる。しかし、この解法は、電流を含む磁気回路の磁界解析ができない欠点があり、適用範囲は限られたものになる。

(3) ベクトルポテンシャルと有限要素法を用いる解法は、要素分割が粗い場合に、使用する関数がアンペアの周回積分の法則を近似的に満足するだけであること、関数の偏微分係数と磁界の方向が直交することなどに起因すると思われる解析誤差が生じる。しかし、磁界と電流との相互作用の解析も可能となるため、要素分割に配慮を加えて、広く利用されると思われる。

以上の 3 解法の比較からは、簡便な等価磁気回路を用いる解法と、適用範囲の広いベクトルポテンシャルと有限要素法を用いる解法が発展するものと考えられるが、もう少し検討を続けたいと思っている。

参考文献

- [1] 大川光吉：永久磁石磁気回路の設計・特性計算法，総合電子出版社，pp. 177-191，(1985)
- [2] シミュレーション技術研究会編：シミュレーション技術(Ⅲ)有限要素法，コロナ社，PP. 71-81，(1981)